Chybovost el. systémů-BER

Tyto slajdy vznikly jako podklady k přednáškám v průběhu mého aktivního působení na Katedře radioelektroniky Českého vysokého učení technického v Praze. Souvisí s problematikou radiotechniky a vysokofrekvenční a měřicí techniky. Domnívám se, že mohou být doplňkovým zdrojem informací studentům a technikům i všem ostatním zájemcům o tuto problematiku.

http://www.radio.feld.cvut.cz

Autor: Doc.Ing. Michal Horevaj,CSc.

CHYBOVOST

- systému (měřením) = BER (Bit Error Rate)

$$\mathrm{BER} = \frac{\text{počet chybných bitů za 1 sekundu}}{\text{celkový počet bitů za 1 sekundu}}$$

- teoretická chybovost (výpočtem) ➡ symbolová $P_s(e)$

  ➡ bitová $P_b(e)$

➡ *modulační metoda* P_m

➡ *kódování* P_c

➡ *přenosový kanál* P_k

$$P_e = P_c + P_m + P_k$$

$$\frac{P_s(e)}{\log_2 M} = P_b(e) \le P_s(e)$$

mHo

BER

$$P_e = f\,(E_b/N_0)$$

(E_b/N_0) → ***normovaný poměr signál / šum***

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{\text{střední energie modulovaného sig. na 1 bit}}{\text{spektr. výkon. hustota šumu (výkon šumu na 1Hz)}}$$

$$N_o = \frac{N}{B_o}$$

$$E_b = CT_b = C\left(\frac{1}{f_b}\right)$$

obecně:

$$P_e = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right) \qquad P_e = f\left(\frac{E_b}{N_0 + ISI}\right) \qquad P_e = f\left(\frac{E_b}{N_0 + ISI + D}\right)$$

mHo

CHYBOVOST

Chybové funkce:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2}\, dz$$

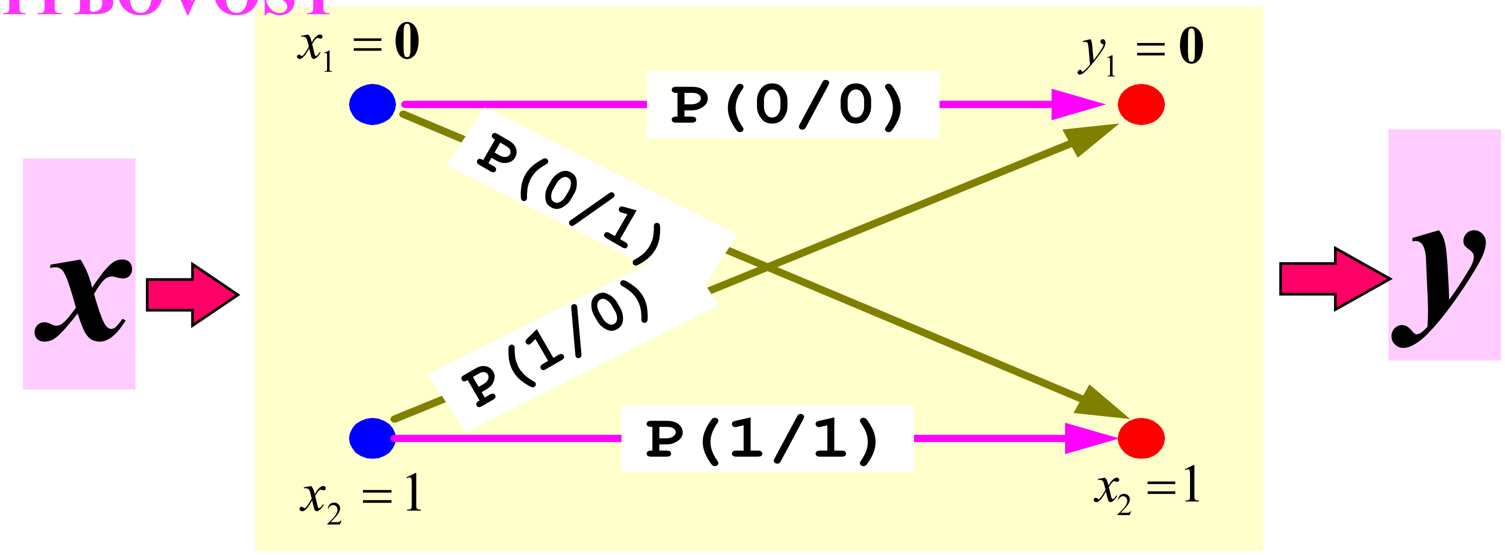
komplementární

$$erfc(x) = 1 - erf(x)$$

Q-funkce
[*Marcum*]

$$Q(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

CHYBOVOST



$$P_e = P(y_2 \backslash x_1)P(x_1) + P(y_1 \backslash x_2)P(x_2)$$

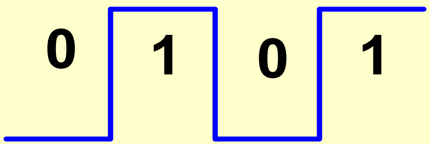
$$P(y_2 \backslash x_1) = P(y_1 \backslash x_2) = \alpha$$

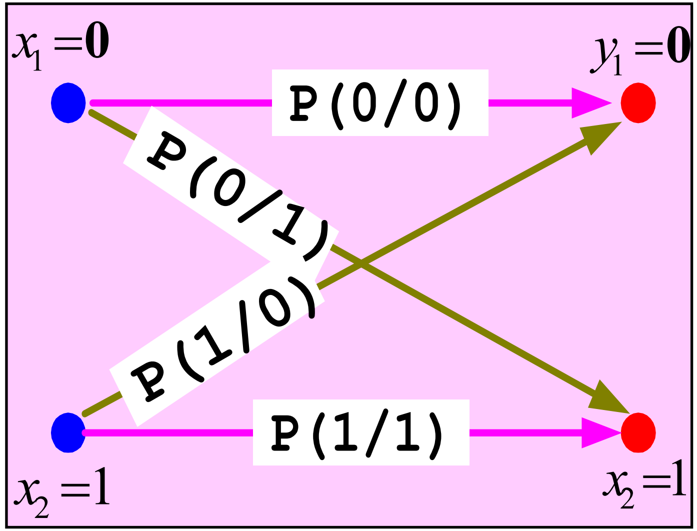
$$\alpha P(x_1) + \alpha P(x_2) = \alpha\left[P(x_1) + P(x_2)\right] = \alpha$$

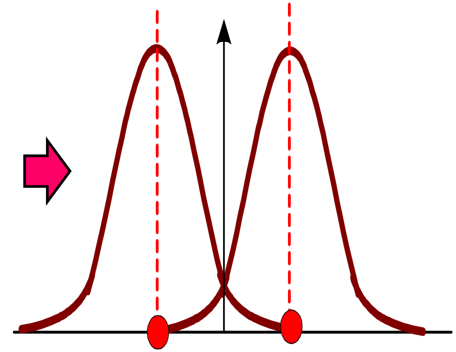
CHYBOVOST

$s_1(t)$

$s_2(t)$ $\quad 0 \le t \le T$







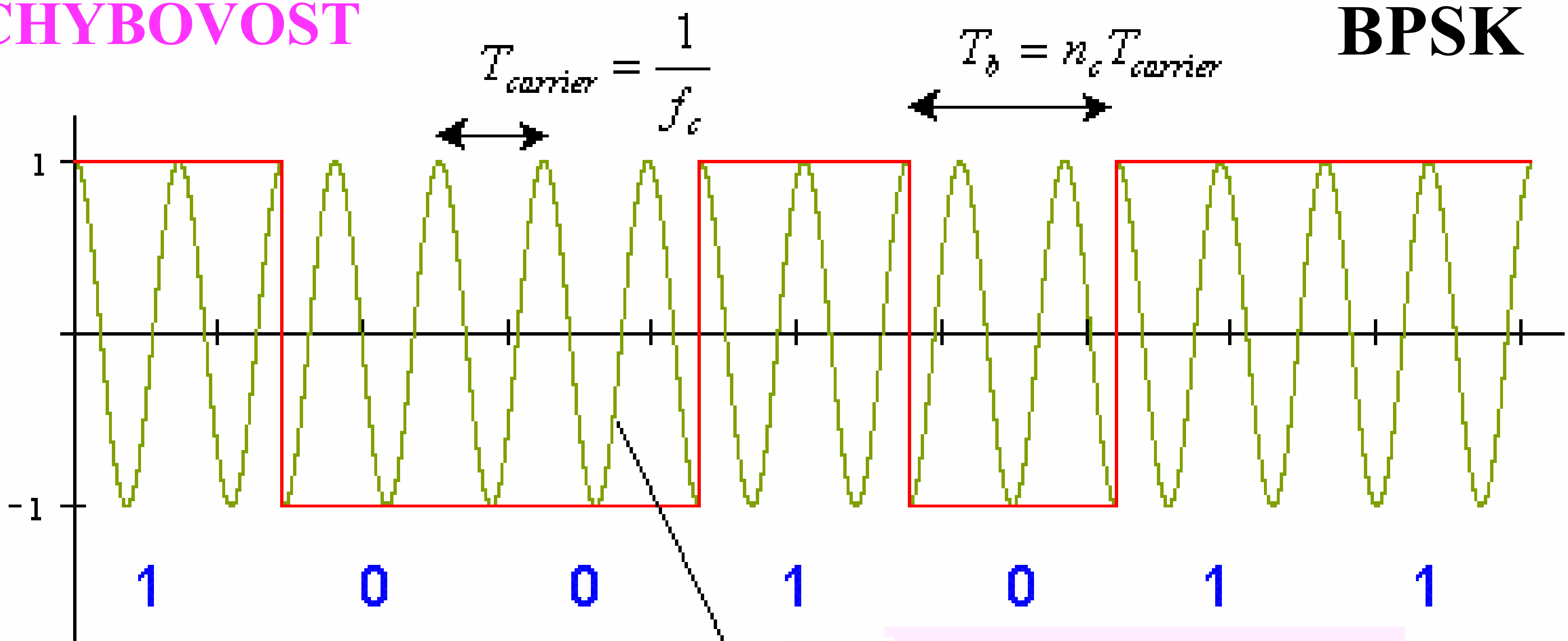
$$s_1 = A\cos(\omega_c t)$$

$$s_2 = A\cos(\omega_c t + \pi) = -A\cos(\omega_c t)$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}$$

CHYBOVOST

BPSK



$$P(t) = [s(t)]^2$$

$$E_b = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt$$

$$E_b = A^2 \int_0^{T_b} \cos^2(\omega_c t)\,dt = \frac{A^2}{2} T_b \Rightarrow A$$

CHYBOVOST - signálový prostor - bázové funkce

- **Signálové prvky $S_i(t)$ je výhodné zobrazit ve vícerozměrném *Euklidově signálovém prostoru - vektorovém prostoru***

- **Každou konečnou soustavu M *signálových prvků* $\{S_i(t)\}$ s dobou trvání T, lze vyjádřit v *signálovém prostoru* pomocí N ortogonálních *bázových funkcí* $\Phi_i(t)$.**

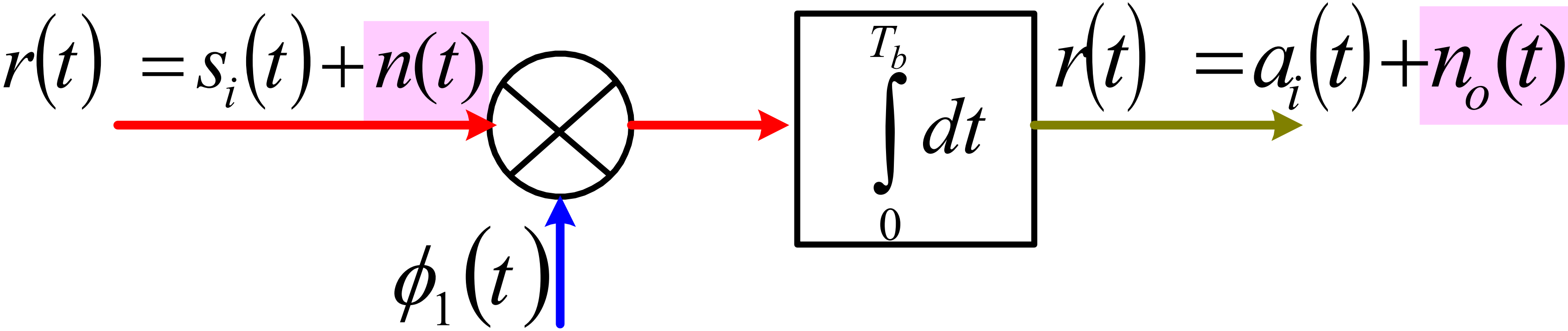
- ***Bázové funkce* $\Phi_i(t)$ lze považovat za souřadnicový systém daného *signálového prostoru.***

- ***Bázové funkce* $\Phi_i(t)$ jsou vzájemně ortogonální**

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(\omega_c t)$$

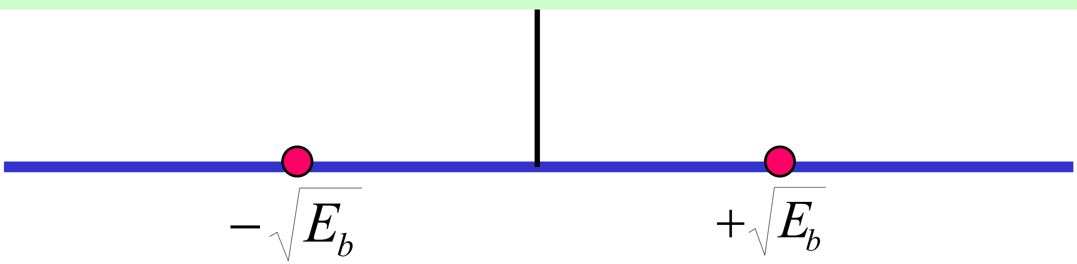
CHYBOVOST

ideální prostředí - *n(t)=0*



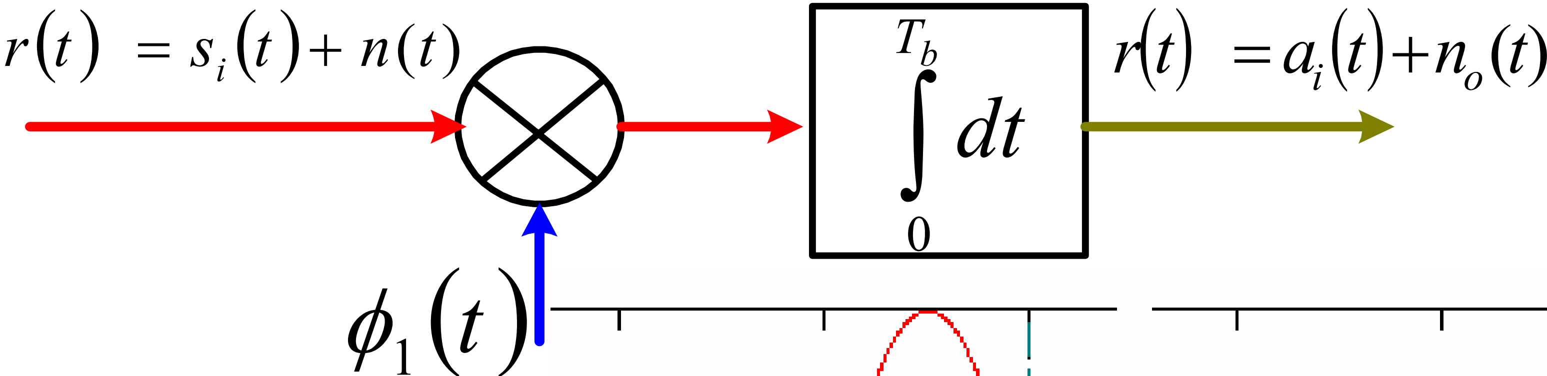
$$a_1 = \int_0^{T_b} r(t)\phi_1(t)dt = \int_0^{T_b} s_1(t)\phi_1(t)dt$$

$$a_1 - \int_0^{T_b} \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos \omega_c t \cdot \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos \omega_c t \, dt = +\sqrt{E_b}$$

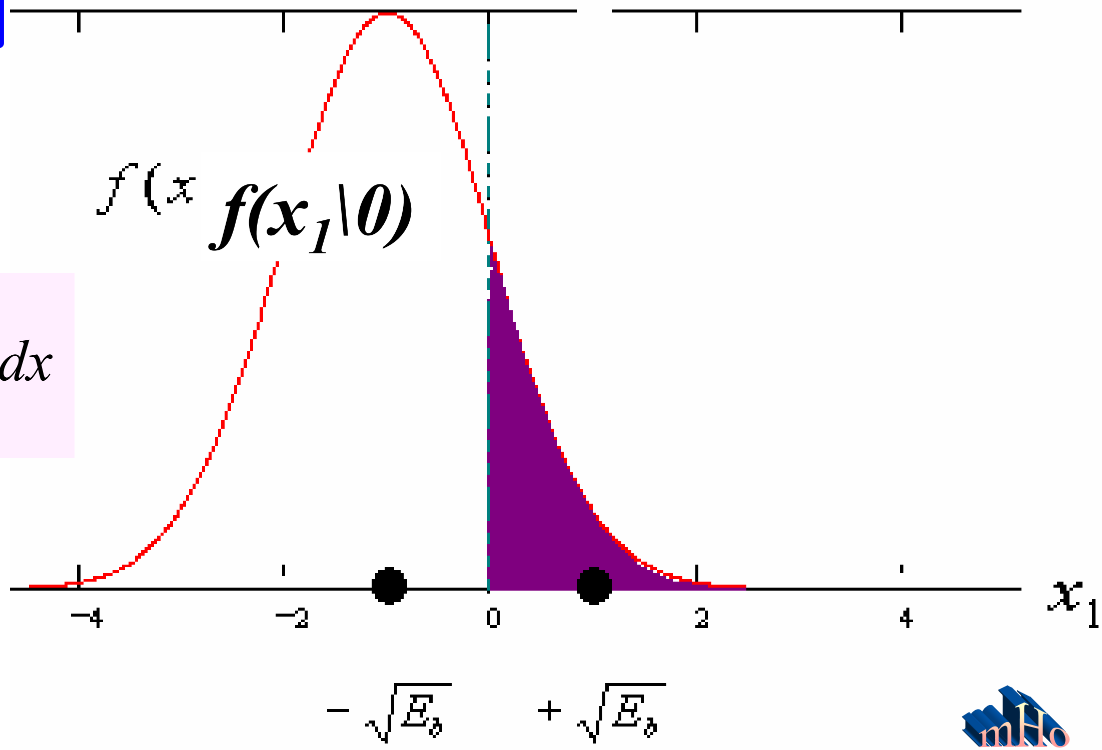


CHYBOVOST

reálné prostředí n(t) není = 0



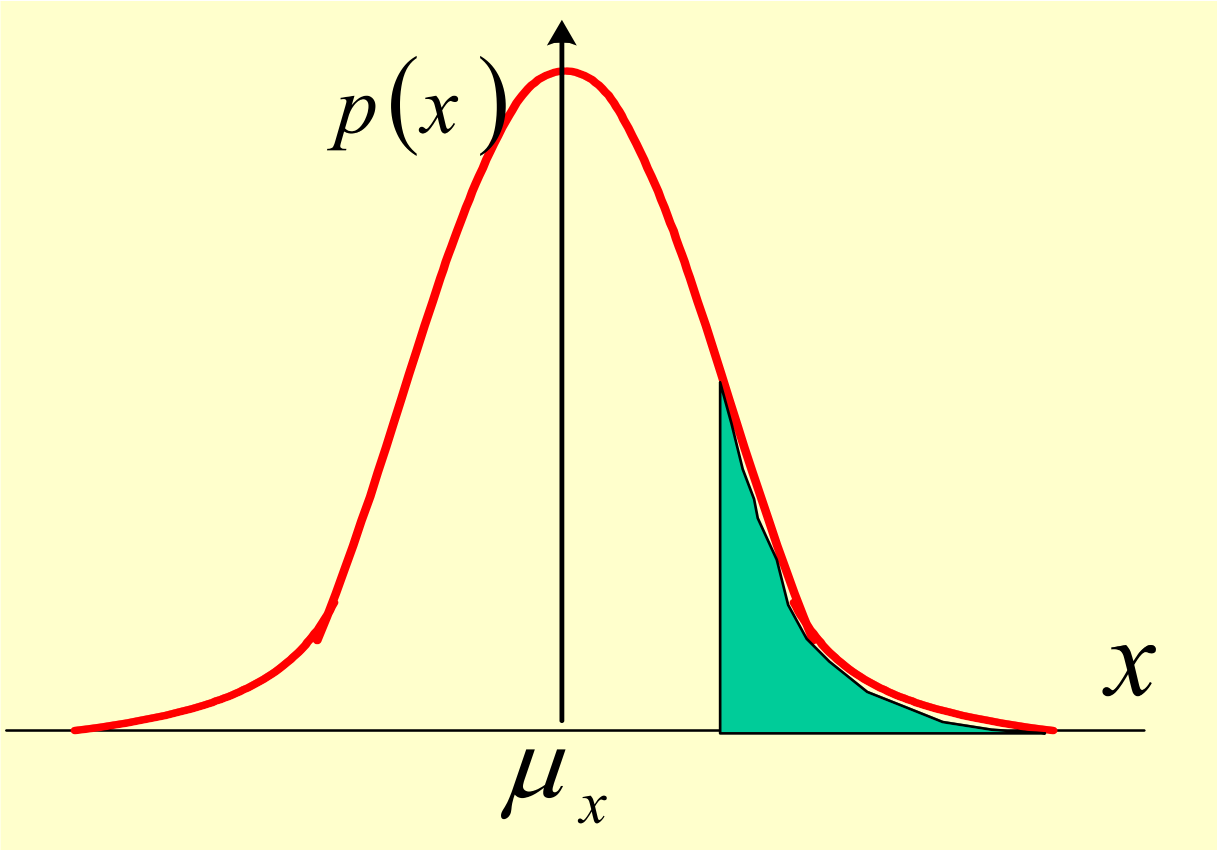
$$P(1 \setminus 0) = \int_0^{\infty} f(x_1 \setminus 0)\,dx$$



CHYBOVOST

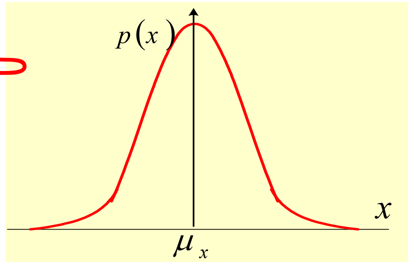
Gaussovo rozdělení

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[- \frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]$$



CHYBOVOST

reálné prostředí n(t) není = 0



$$P(1 \backslash 0) = \int_0^{\infty} f(x_1 \backslash 0)\,dx$$

$$P(1 \backslash 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[- \frac{\left(x_1 + \sqrt{E_b}\right)^2}{2\sigma_x^2} \right] dx$$

Porovnáme s Q-chybovou funkcí:

$$Q(x) = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{u^2}{2} \right\} du$$

CHYBOVOST reálné prostředí ***n(t)*** není = 0

substituce: $$-\frac{u^2}{2} = -\frac{\left(x_1 + \sqrt{E_b}\right)^2}{2\sigma^2} \Rightarrow u = \frac{\left(x_1 + \sqrt{E_b}\right)^2}{\sigma^2}$$

pro $x_1=0$, $\Rightarrow$ $$u = \frac{\sqrt{E_b}}{\sigma}$$ **pro** $x_1 = \infty$ $\Rightarrow$ $u = \infty$

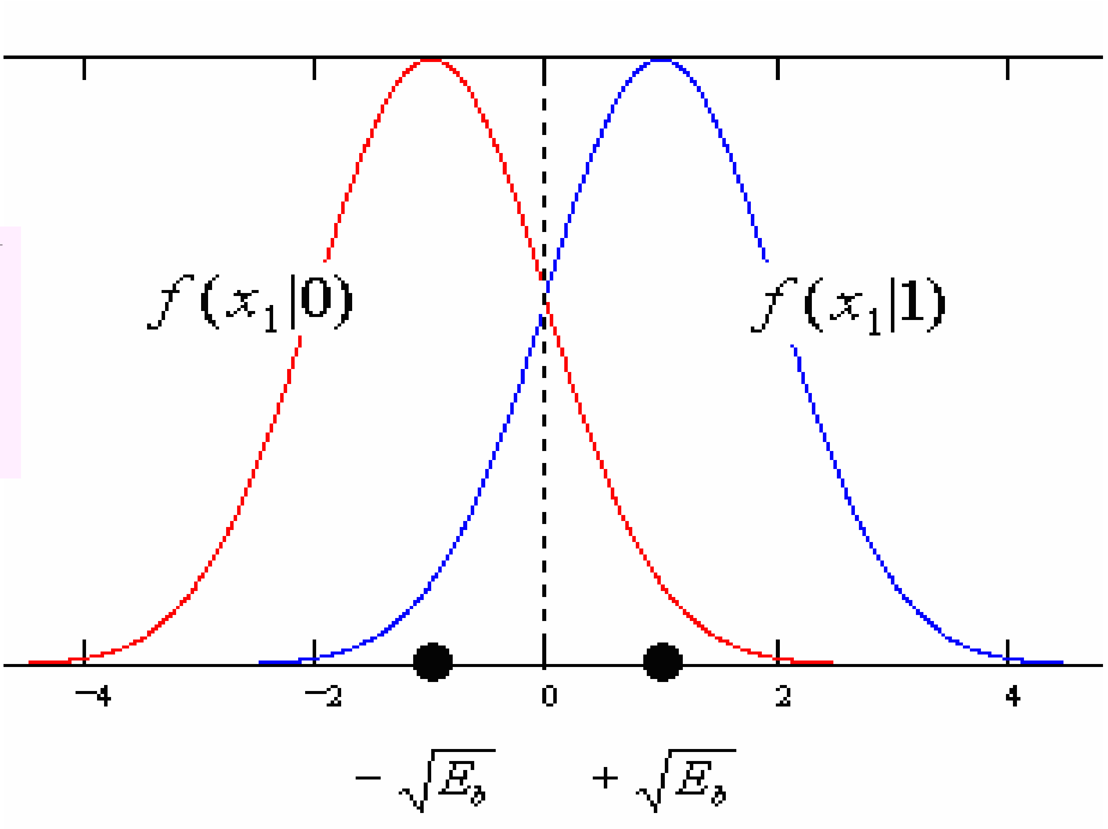
$$P(1 \setminus 0) = \int_{\frac{\sqrt{E_b}}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u)^2}{2}\right] du = \int_{\frac{\sqrt{E_b}}{\sigma}}^{\infty} f(u)\,du$$

$$P(1 \setminus 0) = Q\left(\frac{\sqrt{E_b}}{\sigma}\right)$$

CHYBOVOST

pro BPSK platí: P(1\0)=P(0\1)

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$$

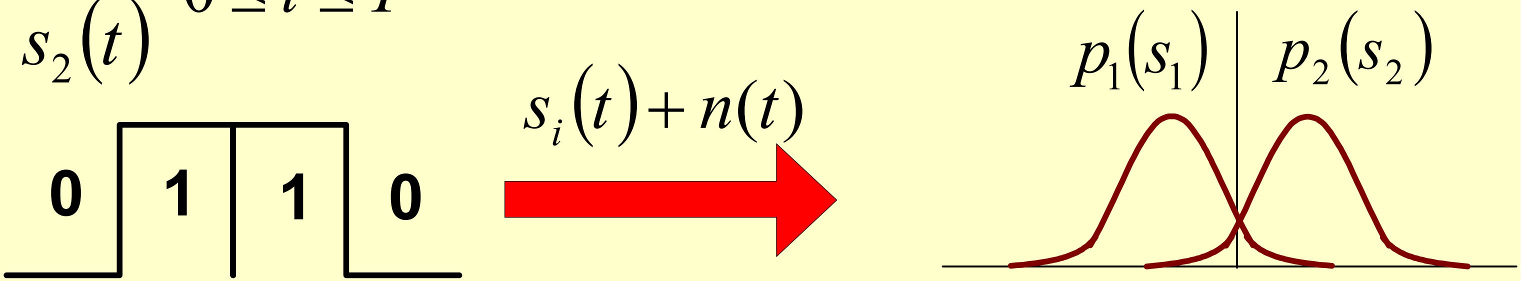


$$P(1 \setminus 0) = P(0 \setminus 1) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

BER

$s_1(t)$

$s_2(t)$ $\quad 0 \le t \le T$



energie:

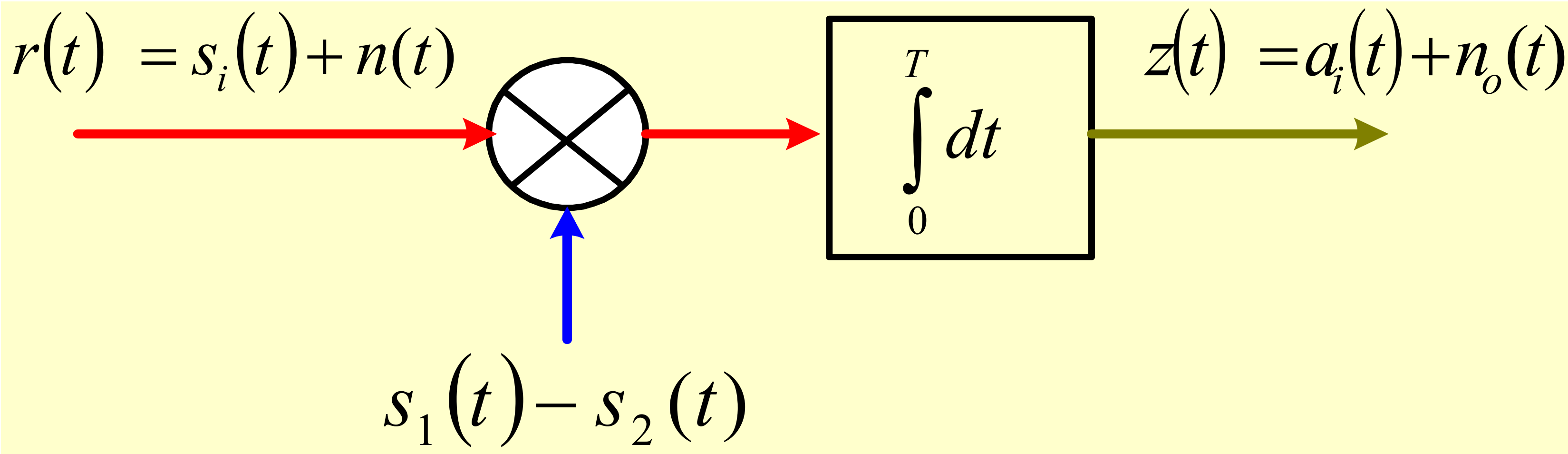
$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$E_2 = \int_0^T s_2^2(t)\,dt$$

korelace:

$$\rho_{12} = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_0^T s_1(t) s_2(t)\,dt$$

BER



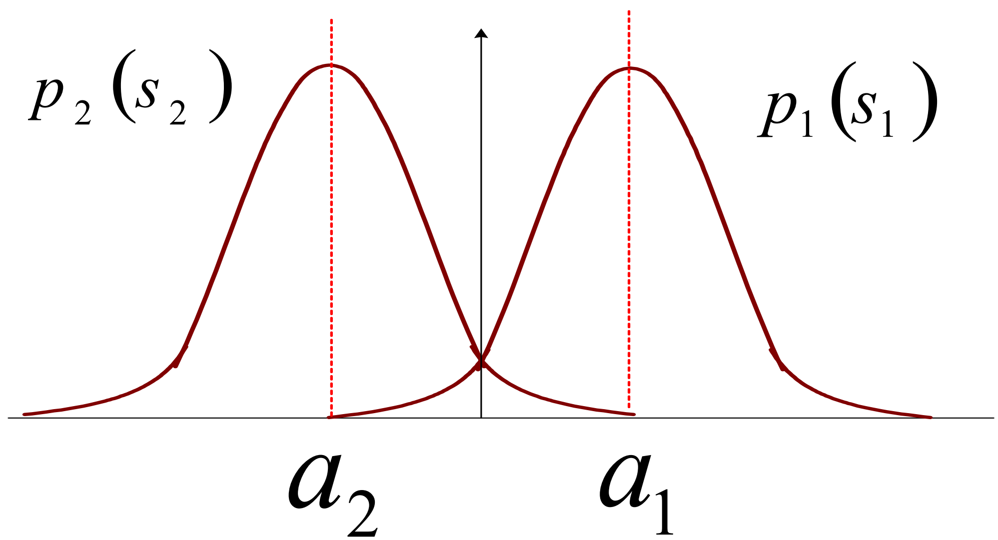
$$s_d = s_1(t) - s_2(t)$$

energie: $$E_d = \int_0^T s_d^2(t)\,dt = \int_0^T \left(s_1(t) - s_2(t)\right)^2 dt$$

BER

$$E_d = \int_0^T s_1^2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t) + \int_0^T s_2^2(t)dt$$

$$E_d = E_1 - 2\rho_{12}\sqrt{E_1 E_2} + E_2$$



BER

$$a = \int_0^T s_d(t) \cdot r(t) dt$$

dosadíme za r(t) $r(t) = s_i(t) + n(t)$

$$a = \int_0^T [s_1(t) + n(t)] \cdot s_d(t) dt$$

$$a = \int_0^T [s_1(t) \cdot s_d(t)] dt + \int_0^T [n(t) \cdot s_d(t)] dt$$

aplikujeme: $s_d = s_1(t) - s_2(t)$

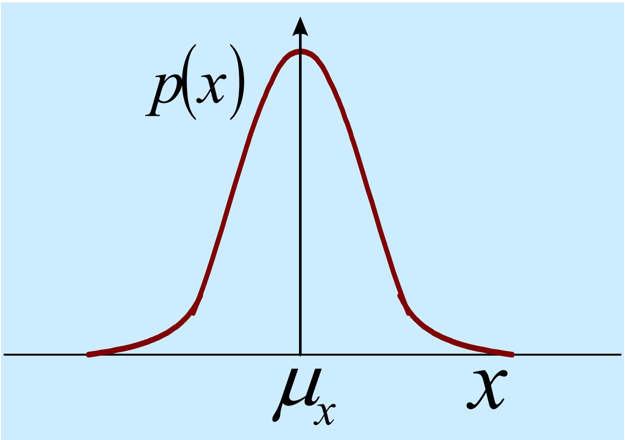
$$a = E_1 - \rho_{12}\sqrt{E_1 E_2} + n$$

kde $n = \int_0^T n(t) \cdot s_d(t) dt$

BER

šumová složka je: $n = \int_0^T n(t)\cdot s_d(t)\,dt$

Gaussovské rozložení

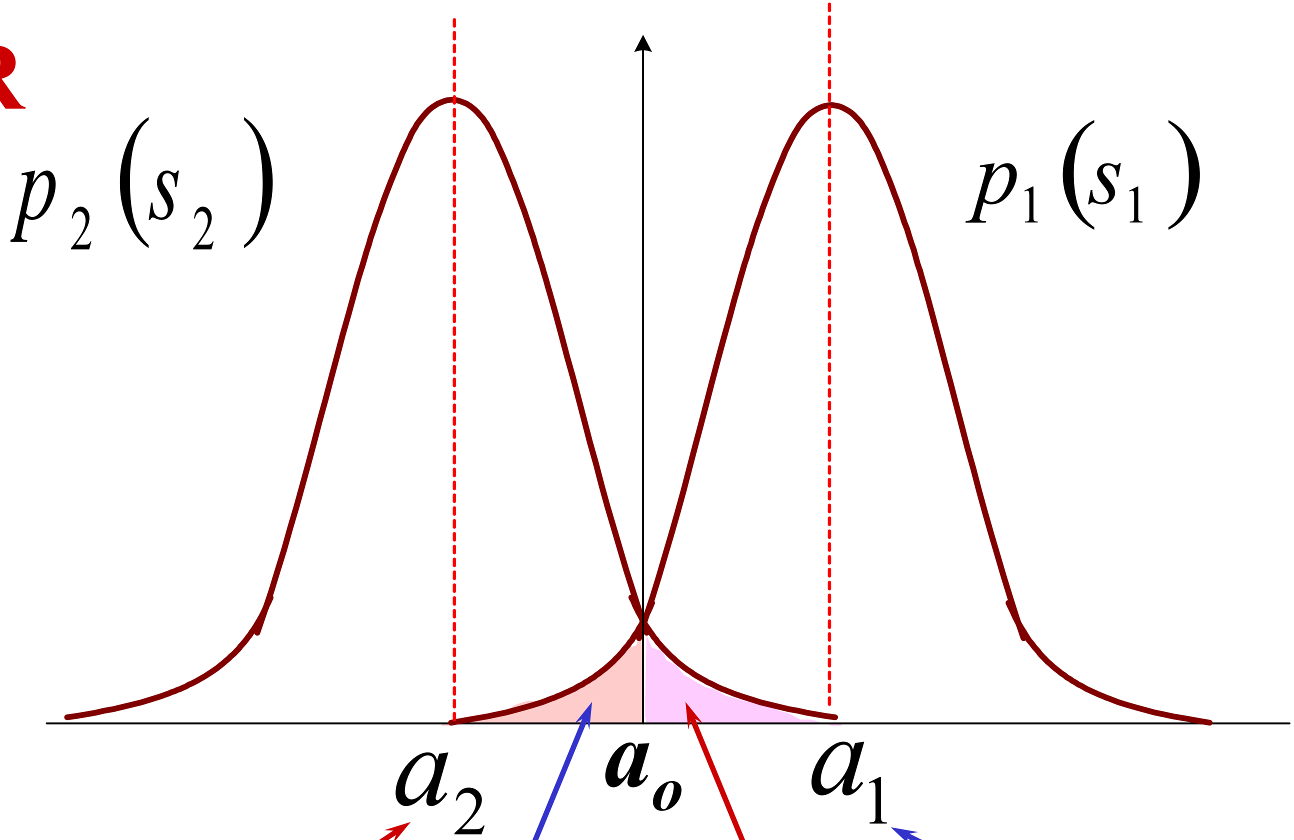


$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

σ_x^2 **= variance** μ_x **= stř.hodnota**

$$\sigma^2 = E\{n^2\} = E\left\{\left[\int_0^T n(t)s_d(t)\,dt\right]^2\right\} = \frac{N_o}{2}E_d$$

BER



$$a_2 = -E_2 + \rho_{12}\sqrt{E_1 E_2}$$

$$p_1(e)$$

$$p_2(e)$$

$$a_1 = E_1 - \rho_{12}\sqrt{E_1 E_2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

BER

$$p_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_o E_d}} \exp\left[- \frac{(\mathrm{a} - \mu_{\mathrm{a1}})^2}{N_o E_d} \right]$$

$$p_2(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_o E_d}} \exp\left[- \frac{(\mathrm{a} - \mu_{\mathrm{a2}})^2}{N_o E_d} \right]$$

$$p_1(e) = \int_{a_o}^{\infty} p(a)da = \int_{a_o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_o E_d}} \exp\left[- \frac{(\mathrm{a} - \mu_{\mathrm{a2}})^2}{N_o E_d} \right] da$$

$$p_1(e) = Q\left(\frac{a_o - \mu_{a2}}{\sqrt{\frac{N_o E_d}{2}}} \right)$$

BER

na rovnici:

$$p_1(e) = Q\left(\frac{a_o - \mu_{a2}}{\sqrt{\frac{N_o E_d}{2}}}\right)$$

aplikujeme : $p_1(e) = p_2(e) = \boldsymbol{P_b(e)}$

$$a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \qquad \mu_{a2} = a_2$$

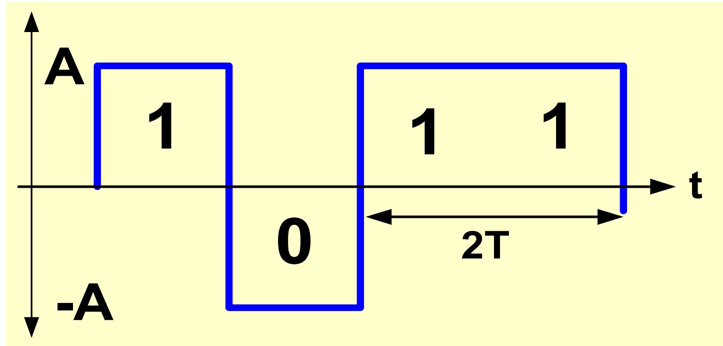
dostaneme pro binární signál :

$$P_b = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2N_o E_d}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_1 + E_2 - 2\rho_{12}\sqrt{E_1 E_2}}{2N_o}}\right)$$

mHo

BER

signál NRZ



$s_1(t) = A, \quad s_2(t) = -A \quad$ v intervalu $\quad 0 < t < T$

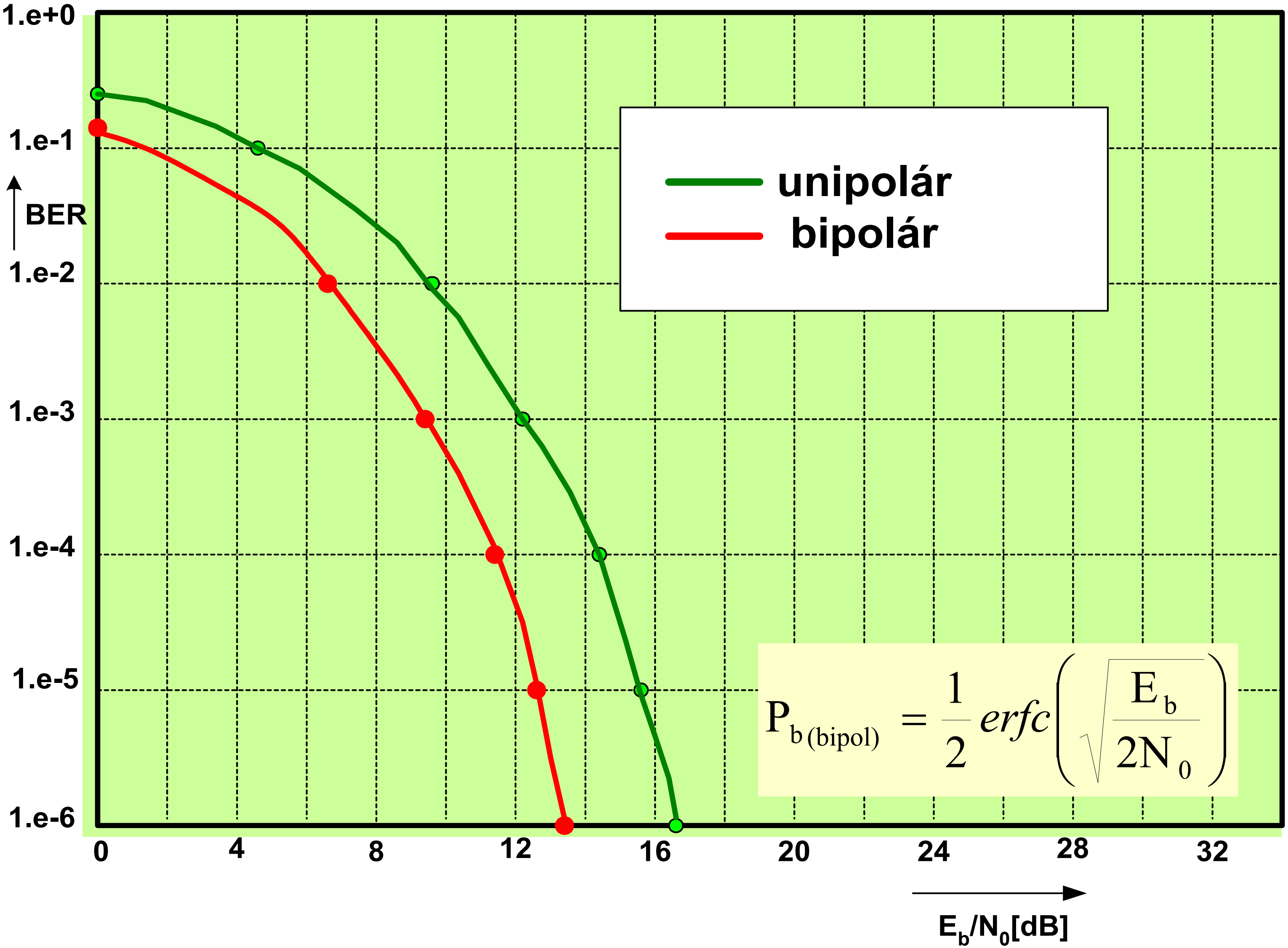
$s_d(t) = 2A$ $\quad \rho_{12} = -1$ $\quad E_1 = E_2 = A^2 T$ $\quad E_d = A^2 T$

$$P_{b/\ NRZ} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$s_1(t) = A, \quad s_2(t) = 0 \quad 0 < t < T$

$$P_{b/\ NRZ} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

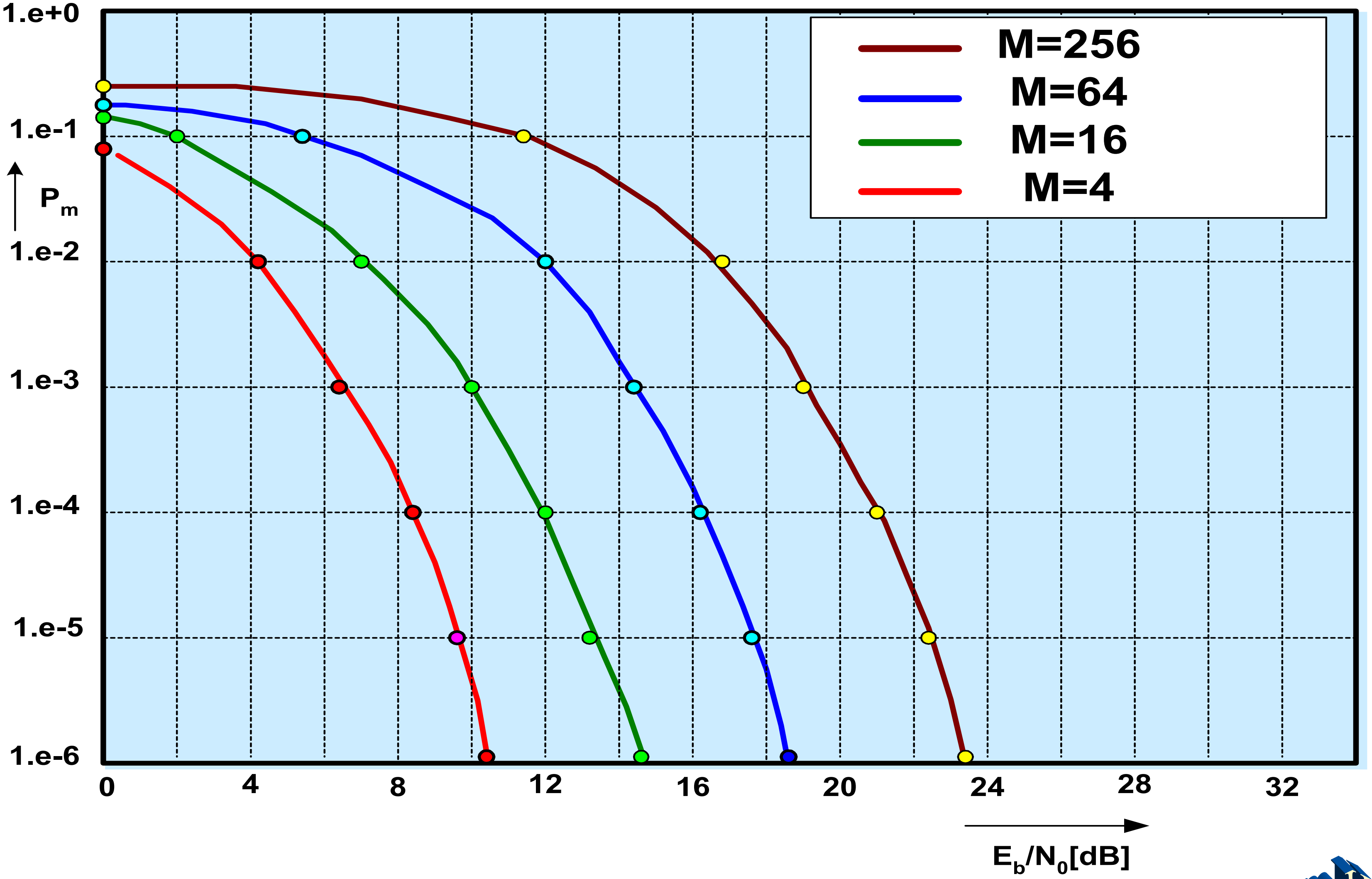
BER



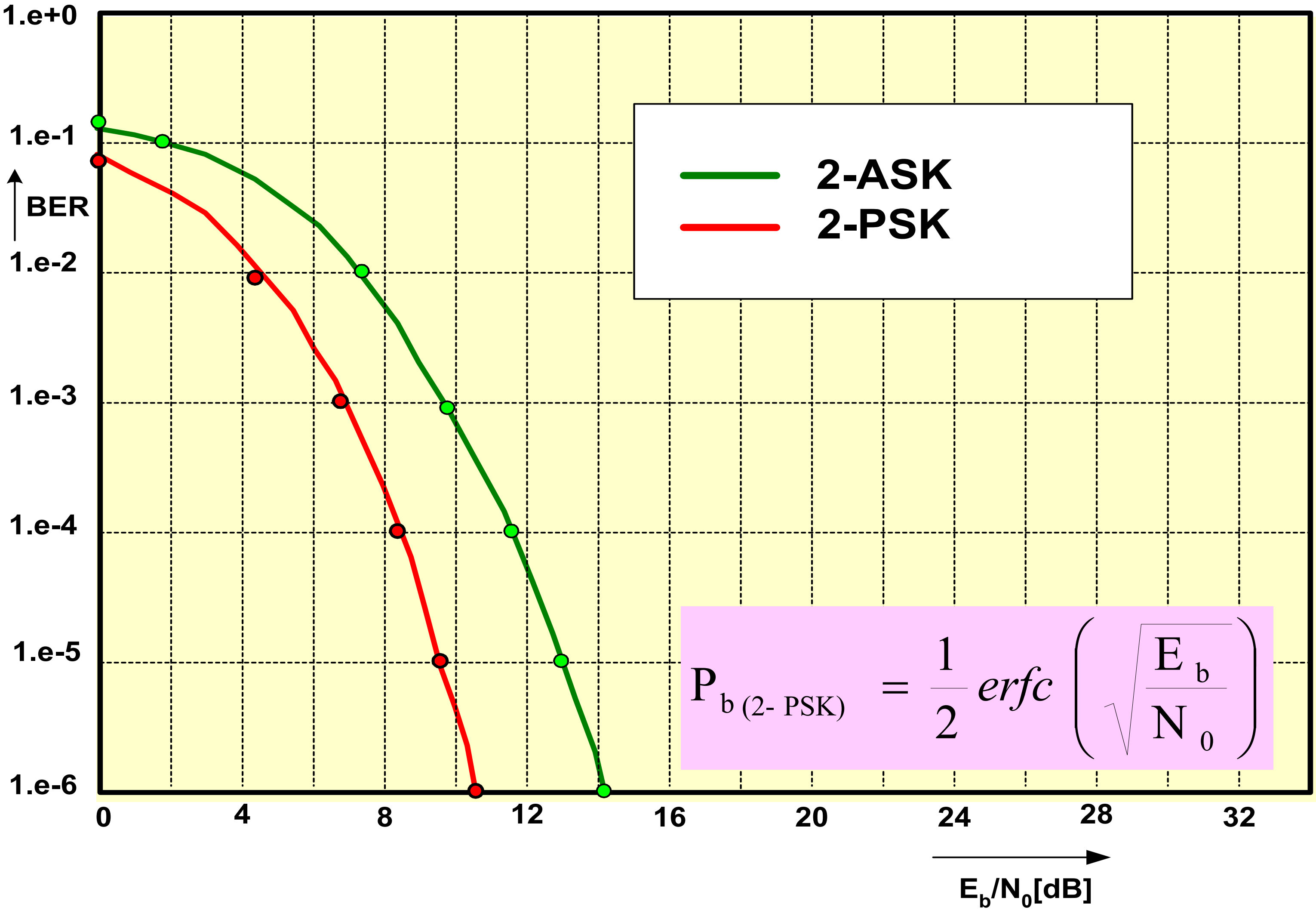
$$P_{b\,(bipol)} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

BER

$$P_{b\text{-}QAM} = f\,(E_b / N_0)$$



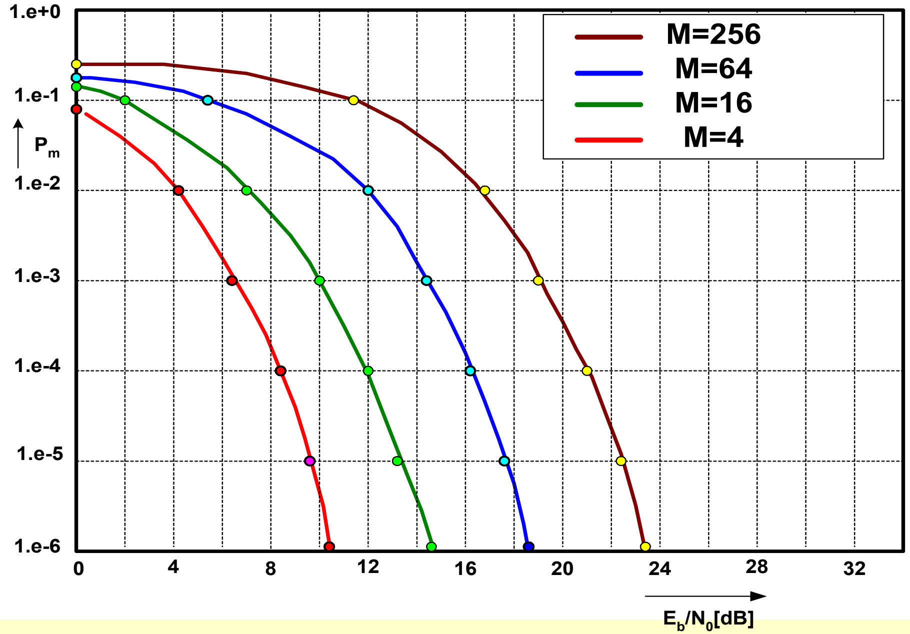
BER



$$P_{b\,(2-PSK)} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

BER

modulace M-QAM



$$P_{b\text{-}QAM} = 1 - \left\{ 1 - \left(2\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\, erfc(S) - \left[\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\, erfc(S) \right]^2 \right) \right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$S = \left[\sqrt{\frac{3}{2(M-1)} \cdot \frac{m \cdot E_b}{N_0}} \right]$$

Literatura:

[1] Reimers, U.: Digital Video Broadcasting (DVB). Springer- Verlag, Heidelberg 2001, str.135-167.

[2] Xiong, F.: Digital Modulation Techniqes. Artech House, London 2000, str.589-608.